Apêndice B

Grupos de Lie e Invariância

Neste capítulo discutimos alguns resultados e conceitos da teoria de Grupos de Lie que são relevantes para problemas em processamento de imagens e visão computacional envolvendo as noções de invariância e espaços de escalas

Estes conceitos são naturalmente tratados dentro da teoria dos Grupos de Lie. Esta teoria está baseada nas idéias de grupo de transformações e variedades diferenciáveis.

Do ponto de vista geométrico, o conceito de variedades diferenciáveis separa claramente o objeto e o sistema de coordenadas usado para sua descrição.

Ao estudarmos a geometria intrínseca de um objeto, as propriedades de interesse não estão vinculadas ao sistema de coordenadas usado para descrevê-lo. A base matemática para a descrição de um objeto, que seja invariante por transformações de coordenadas, está no *cálculo tensorial*.

Do ponto de vista físico, mais próximo portanto de visão computacional, este problema está diretamente ligado ao sistema de unidades fundamentais escolhidas para descrever um fenômeno e o comportamento das grandezas derivadas quando re-escalamos as fundamentais. A *Lei Universal de Invariância* estabelece que as leis físicas devem ser independentes da escolha das grandezas fundamentais (Florack *et al.* , 1992).

Esta lei é básica para a *Análise Dimensional*, cuja formulação mais rigorosa está no teorema dos π (seção B.2). Este resultado, por sua vez, é básico para o trabalho (Florack *et al.* , 1992) que formula o espaço de escalas partindo de considerações algébricas em lugar de analíticas, como foi o caso de (Witkin, 1983).

É importante observar que ao convoluírmos uma imagem com o Kernel Gaussiano, estamos de fato operando sobre o objeto (variedade), transformando-o.

A questão agora é determinar quantidades que sejam invariantes sob transformações do objeto propriamente dito. A base matemática da teoria de invariantes em questão está na teoria de grupos de Lie que é o tema central deste apêndice.

Iniciamos com conceitos necessários à definição de Variedades Diferenciáveis para em seguida apresentarmos os Grupos de Lie e os conceitos da teoria de invariantes.

Passamos em seguida ao Teorema dos π citado acima para então finalizarmos com o método para cálculo de invariantes e aplicações.

B.1 Grupos de Lie

B.1.1 Espaços Topológicos

Dar uma *topologia* sobre um conjunto E é dar um conjunto Θ de partes de E gozando das seguintes propriedades (Honig, 1976):

e1) A reunião $O = \underset{i \in I}{\cup} O_i$ de uma família qualquer O_i de elementos de Θ ainda é um elemento de Θ;

e2) A intersecção $O = O_1 \cap O_2$ de dois conjuntos elementos de Θ ainda é um conjunto de Θ;

e3) $E \in \Theta$.

Nestas condições, o par (E, Θ) é chamado *espaço topológico* . Os elementos de E são denominados genericamente de *pontos* e os conjuntos elementos de Θ são denominados conjuntos *abertos*.

Lembremos que $\underset{i \in \emptyset}{\cup} O_i = \emptyset$, e portanto o conjunto vazio é aberto.

Dado um ponto $p \in E$, chamamos uma *vizinhança* de p a qualquer conjunto V_p que contém um conjunto aberto O com $p \in O$.

Um espaço topológico (E, Θ) é denominado *separado* ou de *Hausdorff* se quaisquer pontos distintos $p \neq q$ têm vizinhanças V_p e V_q sem ponto comum.

B.1.2 Variedades Diferenciáveis

Seja M um espaço de Hausdorff como definido acima. Uma estrutura diferenciável de dimensão n em M é uma família de aplicações biunívocas $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \Re^n$ onde U_α é um aberto de M e $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ é um aberto de $\Re^n$, tais que:

1) $\underset{\alpha}{\cup} U_\alpha = M$.

2) Para todo par α, β, a aplicação $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é diferenciável.

3) A família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é maximal relativamente às condições (1) e (2).

Uma *variedade diferenciável* de dimensão m é um espaço de Hausdorff com uma estrutura diferenciável de dimensão m (Olver, 1986).

Seja $p \in U_\alpha$ e $\varphi_\alpha(p) = (x_1(p), ..., x_m(p))$. Então, o conjunto U_α é chamado uma *vizinhança coordenada* de p e $x_i(p)$ são chamados *coordenadas locais de* p. O par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é chamado uma parametrização (ou um *sistema de coordenadas*) de M em p.

Uma *estrutura analítica* de dimensão m é definida como acima bastando substituir em (2) *diferenciável* por *suave* . Neste caso, M é chamada uma variedade suave.

B.1.3 Definição de Grupo

Definição: Um *grupo* é um conjunto G não vazio juntamente com uma lei de composição interna em G denotada por $(\cdot)$(Olver, 1986):

$$(g,h) \longmapsto g \cdot h, \text{ onde } g,h,g \cdot h \in G,$$

genericamente chamada *multiplicação*, com as seguintes propriedades:

(1) Associativa. Se $g,h,k \in G$, então:

$$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k.$$

(2) Elemento Identidade. Existe um único elemento $e \in G$, chamado *elemento identidade*, tal que a propriedade

$$e \cdot g = g \cdot e = g,$$

para todo $g \in G$.

(3) Inverso. Para todo $g \in G$ existe um elemento denotado por g^{-1}, denominado seu *inverso*, com a propriedade:

$$g \cdot g^{-1} = e.$$

Neste caso, costuma-se dizer que o par $(G,\cdot)$ é um grupo, ou simplesmente que G é um grupo para os casos onde a operação de grupo esteja claramente sub-entendida.

Exemplos:

(a) Seja $G = Z$ o conjunto dos números inteiros com operação de adição. As propriedades acima são naturalmente satisfeitas, sendo o *inverso* de um inteiro x seu oposto $-x$. O mesmo se aplica para $G = \Re$ também com a adição.

(b) Seja $G = GL(n,\Re)$ o conjunto das matrizes reais e inversíveis com a operação de multiplicação. Neste caso, a propriedade associativa é satisfeita, o elemento identidade é exatamente a matriz identidade I usual e o inverso de uma matriz A é dado pela matriz inversa usual A^{-1}.

B.1.4 Definição de Grupos de Lie

Um *grupo de Lie* $r-$*paramétrico* é um grupo G que é também uma variedade suave de dimensão r tal que ambas as operações de grupo (Olver, 1986):

$$m : G \times G \longrightarrow G,\ m(g,h) = g \cdot h,\ g,h \in G,$$

e a inversão

$$i : G \to G,\ i(g) = g^{-1},\ g \in G,$$

são aplicações suaves entre variedades.

Exemplos:

(a) Seja $G = \Re^r$ com a estrutura diferenciável trivial dada pela aplicação identidade e seja a operação de adição usual em $\Re^r$ identificando o inverso de um vetor x com seu oposto $-x$. Uma vez que, tanto a adição de vetores quanto a inversão são operações suaves, $\Re^r$ é um exemplo de um grupo de Lie r-paramétrico.

(b) Consideremos agora o conjunto $G = SO(2)$ das rotações no plano:

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix};\ 0 \leq \theta < 2\pi \right\},$$

com a operação usual de multiplicação de matrizes. Observe que as propriedades de grupo são satisfeitas e portanto $SO(2)$ é um grupo. A estrutura diferenciável pode ser obtida pela observação de que podemos identificar $SO(2)$ com o círculo unitário (Olver, 1986):

$$S^1 = \{(\cos(\theta), sen(\theta));\ 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Assim, $SO(2)$ é um grupo de Lie 1-paramétrico.

B.1.5 Grupo de Transformações Locais

Seja M uma variedade suave. Um grupo local de transformações atuando em M é dado por um grupo de Lie G, um subconjunto aberto U, com

$$\{e\} \times M \subset U \subset G \times M,$$

o qual é o domínio de definição da *ação do grupo*, e uma aplicação suave $\Psi : U \to M$ com as seguintes propriedades:

(a) Se $(h,x) \in U$, $(g, \Psi(h,x)) \in U$, e também $(g \cdot h, x) \in U$, então:

$$\Psi\left(g, \Psi\left(h, x\right)\right) = \Psi\left(g \cdot h, x\right).$$

(b) Para todo $x \in M$.

$$\Psi\left(e, x\right) = x.$$

(c) Se $(g, x) \in U$, então $(g^{-1}, \Psi\left(g, x\right)) \in U$ e:

$$\Psi\left(g^{-1}, \Psi\left(g, x\right)\right) = x$$

.

Note que, para o caso de $M = U$ a propriedade (c) segue diretamente de (a) e (b).

B.1.6 Órbitas

Na definição abaixo, o termo *subvariedade* de uma variedade diferenciável M deve ser entendido como um subconjuntos de M que também é uma variedade diferenciável (Olver, 1986).

Uma órbita de um grupo de transformações locais em M é o *menor* subconjunto (não vazio) invariante pela ação das transformações. Mais precisamente, um subconjunto $\tilde{O} \subset M$ é uma *órbita* desde que ele satisfaça as seguintes propriedades:

(a) Se $x \in \tilde{O}$, $g \in G$ e $g \cdot x$ está definido, então $g \cdot x \in \tilde{O}$,

(b) Se $\ddot{U} \subset \tilde{O}$, e $\ddot{U}$ satisfaz a propriedade (a) então ou $\ddot{U} = \tilde{O}$ ou $\ddot{U}$ é vazio.

Seja G um grupo local de transformações atuando sobre uma variedade M. Então dizemos que:

(a) O grupo G atua $semi-regularmente$ (ação semi-regular) se todas as órbitas de G são da mesma dimensão das sub-variedades de M,

(b) O grupo G atua *regularmente* se a ação é semi-regular e adicionalmente, para todo $x \in M$ existem vizinhanças arbitrariamente pequenas U de x com a propriedade de que cada órbita de G intercepta U em um subconjunto conexo por partes.

B.1.7 Campos Vetoriais em Variedades

Um conceito fundamental na teoria de grupos de Lie e grupo de transformações são as *transformações infinitesimais*. Para apresentar esta idéia, necessitamos primeiramente da noção de campo vetorial em uma variedade. Iniciemos com a definição de vetor tangente.

Seja C uma curva suave em uma variedade M, parametrizada por $\phi : I \subset \Re \rightarrow M$. Em coordenadas locais $x = (x^1, ..., x^m)$ a curva C é dada por m funções suaves $x \circ \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), ..., \phi^m(\varepsilon))$ da variável real ε. Em cada ponto $p = \phi(\varepsilon)$ de C a curva tem um *vetor tangente*, dado no sistema de coordenadas local pela derivada:

$$\frac{d(x \circ \phi)}{d\varepsilon} = \left(\frac{d\phi^1}{d\varepsilon}, \frac{d\phi^2}{d\varepsilon}, ..., \frac{d\phi^m}{d\varepsilon} \right) \tag{B.1}$$

É importante observar que o conceito de vetor tangente é independente do sistema local de coordenadas usado numa vizinhança de x (Olver, 1986; Carmo, 1979).

O conjunto de todos os vetores tangentes a todas as possíveis curvas em M que passam por p é chamado *espaço tangente a M em p*, sendo denotado por $TM\mid_p$.

Se M é uma variedade diferenciável suave de dimensão m então $TM\mid_p$ é um espaço vetorial de dimensão m com:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}, \tag{B.2}$$

fornecendo uma base para $TM\mid_p$, a qual está representada acima no sistema de coordenadas $x = (x^1, ..., x^m)$.

Para distinguir entre vetores tangentes e a noção de campo de vetores dada a seguir, adotaremos a seguinte notação:

$$v\mid_p = \dot{\phi}(\varepsilon) = \dot{\phi}^1(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dot{\phi}^2(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x^2} + ... + \dot{\phi}^m(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x^m}, \tag{B.3}$$

para o vetor tangente a C em $p = \phi(\varepsilon)$.

A coleção de todos os espaços tangentes correspondentes a todos os pontos $p \in M$ é chamado o *fibrado tangente* de M, sendo denotado por

$$TM = \bigcup_{p \in M} TM\mid_p . \tag{B.4}$$

Um *campo vetorial* v em M fornece um vetor tangente $v\mid_p \in TM\mid_p$ a cada ponto $p \in M$, com $v\mid_p$ variando suavemente de um ponto para outro. Em coordenadas locais $(x^1, ..., x^m)$, um campo vetorial é dado por:

$$v(x) = \xi^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2(x) \frac{\partial}{\partial x^2} + ... + \xi^m(x) \frac{\partial}{\partial x^m},$$

onde $\dot{\xi}^i(x)$ é uma função suave de x.

Uma *curva integral* de um campo vetorial v é uma curva suave e paramétrica $\phi(\varepsilon)$ cujo vetor tangente em qualquer ponto coincide com o valor de v no mesmo ponto; isto é:

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = v\mid_{\phi(\varepsilon)},$$

para todo ε. Em coordenadas locais, $x \circ \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), ..., \phi^m(\varepsilon))$ deve ser a solução do sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \ i = 1, ..., m, \tag{B.5}$$

onde $\xi^i(x)$ são as coordenadas de v em x.

Para $\xi^i(x)$ suaves, os teoremas padrões de existência e unicidade para sistemas de equações diferenciais ordinárias garantem que existe uma única solução para (B.5) dada a condição inicial (Sotomayor, 1979):

$$\phi(0) = x_0.$$

Isto implica a existência de uma única curva integral maximal $\phi : I \to M$ passando por um dado ponto $\phi(0) \in M$.

B.1.8 Fluxos e Geradores Infinitesimais

Se v é um campo vetorial, nós denotamos a curva integral maximal de (B.5), passando por x em M, por $\Psi(\varepsilon, x)$ e chamamos Ψ o *fluxo* gerado por v (Olver, 1986). Assim, para cada $x \in M$, e ε em algum intervalo I_x contendo 0, $\Psi(\varepsilon, x)$ será um ponto na curva integral passando através de x em M. O fluxo de um campo vetorial tem as seguintes propriedades (Olver, 1986):

(a) $\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x)$, $x \in M$, para todos $\varepsilon, \delta \in \Re$ tais que ambos os lados da equação estejam definidos,

(b) $\Psi(0, x) = x$, para qualquer $x \in M$,

(c)

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Psi(\varepsilon, x) = v\mid_{\Psi(\varepsilon,x)}$$

As duas primeiras propriedades significam que o fluxo gerado por um campo vetorial comporta-se como um grupo 1-parametrizo de transformações atuando em M. A terceira propriedade simplesmente diz que v é tangente à curva integral $\Psi(\varepsilon, x)$ que passa por um dado $x \in M$. O campo vetorial v é chamado o *gerador*

infinitesimal da ação do grupo assim definido, uma vez que pelo Teorema de Taylor, usando coordenadas locais, temos:

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon\xi(x) + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{B.6}$$

onde:

$$\xi(x) = \frac{d\Psi(\varepsilon = 0, x)}{d\varepsilon}.$$

As órbitas de um grupo 1-paramétrico são as curvas integrais maximais do campo vetorial v.

Intensamente, se $\Phi(\varepsilon, x)$ é um grupo 1-paramétrico de transformações atuando em M, então seu gerador infinitesimal v é dado por:

$$v\ |_x = \frac{d\Phi(\varepsilon = 0, x)}{d\varepsilon}. \tag{B.7}$$

A existência e unicidade da solução de (B.5), para o campo vetorial v assim definido, garante que o fluxo gerado coincide com a ação (local) de $\Phi(\varepsilon, x)$ em M no domínio comum de definição. Assim, existe uma correspondência um-a-um entre grupos 1-paramétricos (locais) de transformações e seus geradores infinitesimais (Olver, 1986).

B.1.9 Teoria de Invariantes

A teoria que segue é útil no estudo de grupos de simetria para sistemas de equações algébricas, isto é, sistemas de equações da forma:

$$F_j(x) = 0,\ j = 1, .., l \tag{B.8}$$

onde $F_1(x), ..., F_l(x)$ são funções suaves com valores reais definidas para todo x em uma variedade M. Uma solução de um sistema deste tipo é um ponto x tal que $F_j(x) = 0$, para $j = 1, .., l$. Um grupo de simetria do sistema (B.8) é um grupo local de transformações G atuando em M tal que G transforma soluções do sistema em outras soluções do mesmo.

Do ponto de vista dos problemas em visão computacional, nosso objetivo com os conceitos que seguem é primeiramente dar a base teórica para a apresentação do Teorema dos π, usado em (Florack *et al.* , 1992) para a demonstração da unicidade do Kernel Gaussiano sob as restrições de simetria discutidas no Capítulo 2.

Em seguida, estes conceitos aparecem de maneira mais prática, no contexto de determinação de invariantes, seguindo o trabalho de (Gool *et al.* , 1995).

Subconjuntos invariantes

Seja G um grupo local de transformações em uma variedade M. Um subconjunto $\Im \subset M$ é chamado $G-$*invariante* e G é chamado um grupo de simetria de $\Im$, se para qualquer $x \in \Im$ e $g \in G$ tais que $g \cdot x$ esteja definido tivermos $g \cdot x \in \Im$.

Funções Invariantes

Seja G um grupo de transformações locais atuando em uma variedade M. Uma função $F : M \to N$, onde N é outra variedade, é chamada uma função $G-$*invariante* se para todo $x \in M$ e todo $g \in G$ tal que $g.x$ esteja definido tivermos:

$$F(g \cdot x) = F(x).$$

Invariância Local

Seja G um grupo local de transformações atuando em uma variedade M. Um subconjunto $\Im \subset M$ é chamado *localmente G-invariante* se para todo $x \in \Im$ existe uma vizinhança $\widetilde{G}_x \subset G$ da identidade em G tal que $g \cdot x \in \Im$ para todo $g \in \widetilde{G}_x$.

Uma função suave $F : U \to N$ onde U é um subconjunto aberto de M, é chamada localmente $G-$*invarinte* se para todo $x \in U$ existe uma vizinhança $\widetilde{G}_x \subset G_x$ do elemento identidade e em G tal que $F(g \cdot x) = F(x)$ para todo $g \in \widetilde{G}_x$.

F é chamada globalmente invariante se $F(g \cdot x) = F(x)$ para todo $x \in U$, $g \in G$ tal que $g \cdot x \in U$.

Invariantes e Dependência Funcional

Sejam $\zeta^1(x), ..., \zeta^k(x)$ funções suaves com valores reais, definidas em uma variedade M. Então:

(a) $\zeta^1, ..., \zeta^k$ são chamadas *funcionalmemte dependentes* se para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e uma função suave com valores reais $F\left(z^1, ..., z^k\right)$, não identicamente nula em qualquer subconjunto aberto de $\Re^k$, tal que:

$$F\left(\zeta^1(x), ..., \zeta^k(x)\right) = 0, \tag{B.9}$$

para todo $x \in U$.

(b) $\zeta^1, ..., \zeta^k$ são chamadas *funcionalmente independentes* se elas não são funcionalmente dependentes quando restritas a qualquer subconjunto aberto $U \subset M$; em outras palavras, se $F\left(z^1, ..., z^k\right)$ é tal que (B.9) vale para todo x em algum subconjunto aberto $U \subset M$, então $F\left(z^1, ..., z^k\right) \equiv 0$ para todo z em algum subconjunto aberto de $\Re^k$ (o qual está contido na imagem de U).

Teorema: Seja G atuando semi-regularmente (seção B.1.6) em uma variedade com dimensão m. Seja s a dimensão das órbitas correspondentes. Se $x_0 \in M$, então existem precisamente $m-s$ invariantes locais, funcionalmente independentes, $\zeta^1(x), ..., \zeta^{m-s}(x)$ definidos em uma vizinhança de x_0. Além disso, qualquer outro invariante definido próximo de x_0 é da forma

$$\zeta(x) = F\left(\zeta^1(x), ..., \zeta^{m-s}(x)\right), \tag{B.10}$$

para alguma função suave F. Se a ação de G é regular, então os invariantes podem ser tomados como sendo globalmente invariantes em uma vizinhança de x_0.

Demonstração: Ver (Olver, 1986).

B.2 Análise Dimensional

No caso de grupos de transformações de escala, a Teoria acima é a base do Teorema dos π o qual é fundamental para os métodos em análise dimensional.

Em qualquer problema físico (e também em processamento de imagens) existem quantidades fundamentais , tais como comprimento, freqüência, etc, os quais podem ser escaladas independentemente umas das outras. Sejam $(z^1, z^2, ..., z^m)$ estas quantidades. Assim o grupo de *transformações de escala* age sobre estas quantidades de acordo com:

$$\left(z^1, z^2, ..., z^r\right) \longrightarrow \left(\lambda_1 z^1, \lambda_2 z^2, ..., \lambda_r z^r\right), \tag{B.11}$$

onde os fatores de escala $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$ *são* números reais positivos arbitrários. Assim o correspondente grupo é exatamente o produto cartesiano de r cópias do grupo multiplicativo $\Re^+$ dos números reais positivos (Olver, 1986).

Quantidades derivadas, tais como velocidade, luminância da imagem como função das coordenadas espaciais, etc; são afetadas pela transformação das quantidades fundamentais dada por (B.11) acima. Se chamarmos estas quantidades por $(x^1, x^2, ..., x^m)$ e, assumindo homogeneidade dimensional (Martins *et al.* , 1979), a ação do grupo de escalas nas quantidades derivadas toma a forma:

$$\lambda \cdot \left(x^1, x^2, ..., x^m\right) = \left(\lambda_1^{\alpha_{11}} \lambda_2^{\alpha_{21}} ... \lambda_r^{\alpha_{r1}} x^1, ..., \lambda_1^{\alpha_{1m}} \lambda_2^{\alpha_{2m}} ... \lambda_r^{\alpha_{rm}} x^m\right), \tag{B.12}$$

onde os expoentes $\alpha_{i,j} \in \Re^+, i = 1, ..., r, j = 1, ..., m$, são prescritos pela dependência das quantidades x^j com relação às fundamentais z^i.

Se uma grandeza derivada permanece inalterada quando as fundamentais são re-escaladas segundo (B.11) então esta quantidade é dita *adimensional.*

É possível também termos funções $F(x^1, x^2, ..., x^m) = 0$ invariantes pela transformação de escala (B.11), as quais são denominadas *unit-free*.

Teorema dos π: Sejam $z^1, z^2, ..., z^r$ as quantidades fundamentais as quais são escaladas independentemente de acordo com $z^i \rightarrow \lambda_i z^i$. Sejam $x^1, x^2, ..., x^m$ as quantidades derivadas as quais escalam de acordo com (B.12) para alguma matriz de constantes $A = (\alpha_{i,j})_{rxm}$. Seja s o posto de A. Então existem $m - s$ quantidades adimensionais:

$$\pi^k = \left(x^1\right)^{\beta_{1k}} \left(x^2\right)^{\beta_{2k}} ... \left(x^m\right)^{\beta_{mk}}, \ \beta_{ik} \in \Re^+; \ k = 1, ..., m-s; \ i = 1, ..., m, \quad \text{(B.13)}$$

com a propriedade que qualquer outra quantidade adimensional pode ser escrita como uma função dos π^1, π^2,...,π^{m-s}. Se $F(x^1, x^2, ..., x^m) = 0$ é *unit-free*, então existe uma relação equivalente $\widetilde{F}(x^1, x^2, ..., x^m) = 0$ a qual pode ser expressa somente em termos das quantidades adimensionais em (B.13):

$$\widetilde{F}\left(\pi^1, \pi^2, ..., \pi^{m-s}\right) = 0.$$

Demonstração: Ver (Olver, 1986).

Calculando Invariantes

Vejamos como usar a teoria de Lie para calcular invariantes. O procedimento descrito abaixo poderia ser compactado através da derivada de Lie. No entanto, uma vez que a proposta desta seção é efetivamente o cálculo dos invariantes faremos uma apresentação menos formal seguindo aquela dada em (Gool *et al.* , 1995).

Suponha então que as grandezas de interesse estão agrupadas no vetor coluna $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2, ..., m_{n_m})^T$. Vamos assumir que existe um grupo de Lie G $n_p -$ *paramétrico* cuja ação no espaço destas grandezas modela as mudanças de interesse.

Formalmente,

$$\overrightarrow{m}' = g \cdot \overrightarrow{m}, \quad \text{(B.14)}$$

onde $\overrightarrow{m}'$ denota simplesmente o vetor transformado (não confundir com derivada).

Um invariante f é então uma função $f(\overrightarrow{m})$ do vetor de medidas cujo valor não é afetado pela ação do grupo G :

$$f(\overrightarrow{m}') = f(g \cdot \overrightarrow{m}) = f(\overrightarrow{m}), \text{ para todo } g \in G. \quad \text{(B.15)}$$

Uma vez que G é um grupo de Lie temos que g pode ser expressa como uma função (suave) $g = g\left(p_1, p_2, ..., p_{n_p}\right)$ dos parâmetros p_i do grupo.

Se variarmos suavemente o vetor de parâmetros teremos:

$$g(t) = g\left(p_1(t), p_2(t), ..., p_{n_p}(t)\right). \tag{B.16}$$

Substituindo (B.16) na expressão (B.15) é imediato que:

$$\frac{d}{dt} f\left(\overrightarrow{m}'(t)\right) = 0. \tag{B.17}$$

pois do contrário f não seria um invariante.

Pela regra de Cadeia:

$$\sum_{i=1}^{n_m} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\partial f}{\partial m_i'} \frac{\partial m_i'}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} = 0. \tag{B.18}$$

Duas observações importantes devem ser feitas neste ponto. Uma vez que a equação diferencial (B.18) deve ser válida para qualquer função $g(t) = g\left(p_1(t), p_2(t), ..., p_{n_p}(t)\right)$, e portanto para todo $\frac{dp_j}{dt}$, é necessário que:

$$\sum_{i=1}^{n_m} \frac{\partial f}{\partial m_i'} \frac{\partial m_i'}{\partial p_j} = 0, \text{ para todo } j = 1, 2, ..., n_p. \tag{B.19}$$

A segunda observação vem de uma generalização do resultado B.6 segundo a qual os operadores diferenciais:

$$\sum_{i=1}^{n_m} \frac{\partial m_i'}{\partial p_j} \mid_{p=e} \left(\frac{\partial}{\partial m_i}\right), \tag{B.20}$$

são *geradores infinitesimais* do grupo de Lie G (Olver, 1986). Assim, basta resolver a equação (B.19) para $t = 0$, para obtermos a condição necessária e suficiente para que f seja um invariante. Assim, temos finalmente o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\sum_{i=1}^{n_m} \frac{\partial m_i'}{\partial p_j} \mid_{p=e} \left(\frac{\partial f}{\partial m_i}\right) = 0, j = 1, 2, ..., n_p. \tag{B.21}$$

As soluções deste sistema fornecem os invariantes procurados. O teorema do final da seção B.1.9 fornece número de soluções funcionalmente independentes deste sistema, uma vez conhecida a dimensão das órbitas do grupo G.

B.3 Aplicações

Um exemplo simples pode esclarecer os conceitos acima. Tomemos então o caso do movimento rígido no plano. O conjunto de transformações em questão, denotado por $M(2)$, é caracterizado por três parâmetros: o ângulo de rotação θ e as coordenadas do vetor de translação dadas por (t_1, t_2).

Sejam duas transformações $A, B \in M(2)$. Usando coordenadas homogêneas, estas transformações podem ser escritas na forma:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta & t_1 \\ sen\theta & \cos\theta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -sen\phi & t_3 \\ sen\phi & \cos\phi & t_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O conjunto $M(2)$ munido da operação de composição de transformações definida pelo produto (usual) $C = A \cdot B$ é um Grupo de Lie de dimensão 3. Sua ação sobre o $\Re^2$ (seção B.1.5) é definida por uma aplicação:

$$\Psi : M(2) \times \Re^2 \to \Re^2;$$

dada pelas seguinte expressão:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos(\theta) - y_1 sen(\theta) + t_1 \\ y_1' &= x_1 sen(\theta) + y_1 \cos(\theta) + t_2 \end{aligned} \tag{B.22}$$

Observemos no entanto, que ao considerarmos movimentos rígidos estamos pensando em transformações que preservam a distância entre dois pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Re^2$. Assim, um vetor de grandezas mais completo seria $\vec{m} = (x_1, y_1, x_2, y_2)^T$, o qual será transformado no vetor $\vec{m}' = (x_1', y_1', x_2', y_2')^T$ dado por:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos(\theta) - y_1 sen(\theta) + t_1 \\ y_1' &= x_1 sen(\theta) + y_1 \cos(\theta) + t_2 \\ x_2' &= x_2 \cos(\theta) - y_2 sen(\theta) + t_1 \\ y_1' &= x_2 sen(\theta) + y_2 \cos(\theta) + t_2 \end{aligned} \tag{B.23}$$

Formalmente, estamos procurando invariantes para o grupo $M(2)$ atuando sobre $\Re^2 \times \Re^2$; ou seja, funções reais $f(x_1, y_1, x_2, y_2)$ tais que:

$$f(x_1', y_1', x_2', y_2') = f(x_1, y_1, x_2, y_2) \tag{B.24}$$

O sistema de equações B.21 toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} -y_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial f}{\partial y_1} - y_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial f}{\partial y_2} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2} &= 0. \end{aligned} \tag{B.25}$$

a qual (como já esperado) possui solução analítica dada por:

$$f\left(x_1, y_1, x_2, y_2\right) = F\left(\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2\right), \tag{B.26}$$

onde $F : \Re^2 \rightarrow \Re$ é uma função diferenciável qualquer.

Se tivéssemos usado como vetor de grandezas apenas as coordenadas (x_1, y_1) obteríamos apenas a função $f = (x_1)^2 + (y_1)^2$como único invariante funcionalmente independente. A quantidade de coordenadas do vetor de grandezas é uma escolha que depende primeiramente da aplicação desejada.

Com este exemplo simples podemos apresentar o esquema da Figura B.1, o qual identifica os principais passos para a aplicação prática da teoria de Lie no cálculo de invariantes:

Apesar de matematicamente rigorosa, a aplicação da Teoria de Lie segundo os passos indicados no esquema não se faz, em geral, de maneira tão direta como no exemplo apresentado.

Primeiramente, a solução do sistema de equações diferenciais correspondente pode exigir o conhecimento de resultados específicos sobre Teoria de Lei em equações diferenciais (Olver, 1986).

Além disso, os invariantes encontrados podem envolver derivadas de alta ordem, o que pode trazer problemas de estabilidade numérica quando aplicados.

Soma-se ainda a dificuldade inicial de definir claramente o Grupo de Lie G a ser usado, uma vez que o conjunto de transformações de interesse pode não ser um grupo com relação à composição de transformações considerada.

Em (Gool *et al.* , 1995) estes problemas são analisados e alguns exemplos mais elaborados são estudados no sentido de apresentar algumas diretrizes para resolvê-los e o potencial da teoria acima na prática.

Um destes exemplos pode ser um caminho interessante para usarmos Grupos de Lie no contexto das snakes, ou mais especificamente, das AI-Snakes da seção 5.1.3. Nesta formulação considera-se invariância por transformações afins mas não se cogita a possibilidade de reparametrizar a snake durante sua evolução. Tal procedimento poderia ser necessário dependendo da proximidade da curva inicial e da solução procurada.

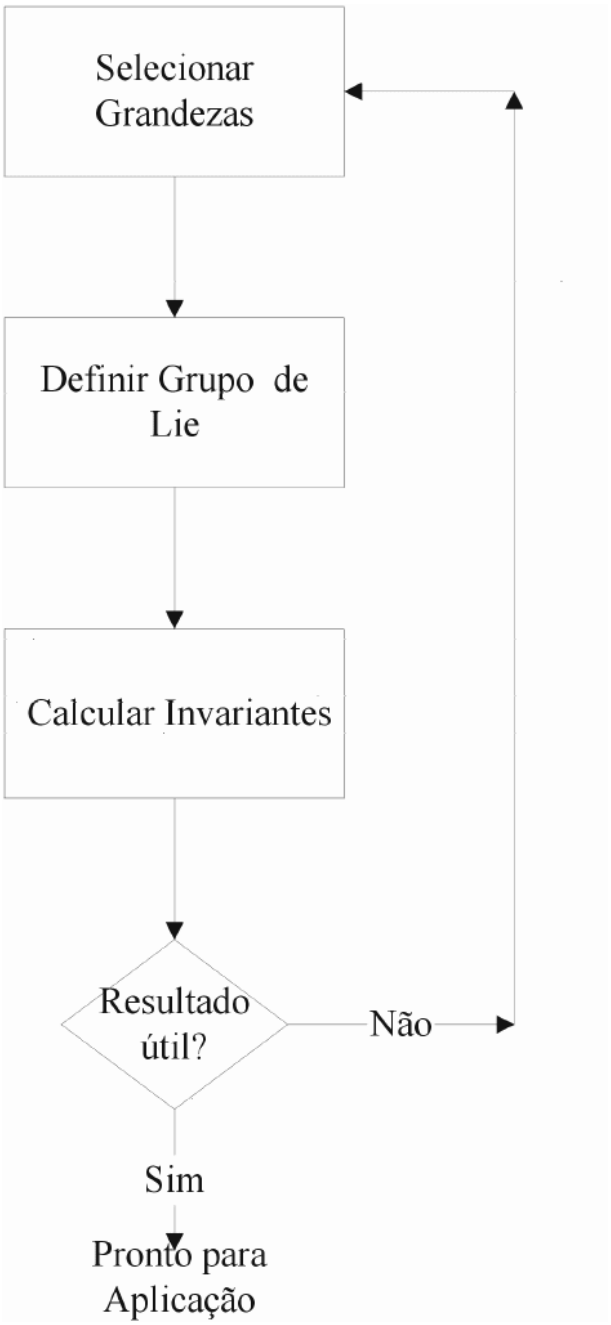

Figura B.1: Esquema com principais etapas para aplicação da Teoria de Lie em visão computacional.

Para facilitar a apresentação, vamos retomar a formulação contínua de modelo original da seção 3.1.

Seja então uma curva parametrizada $c(s)$, tal que:

$$c : [0,1] \rightarrow \Re^2$$

Observemos que o operador de energia da snake dado pela expressão (3.6) depende não apenas das coordenadas espaciais x, y dos pontos da curva mas também de derivadas destas com relação ao parâmetro s. No caso do modelo original temos derivadas até segunda ordem. Em modelos vinculados usados para tracking podemos ter derivadas de ordem mais elevada (Black & Yuille, 1993). Façamos então um desenvolvimento geral.

Ao reparametrizarmos a curva segundo uma função $s = \phi(\tau)$ as derivadas da coordenada x (e analogamente para a coordenada y) são transformadas segundo a expressão:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{d\tau} \\ \frac{d^2x}{d\tau^2} \\ \frac{d^3x}{d\tau^3} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{d^mx}{d\tau^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\phi}{d\tau} & 0 & 0 & ... & 0 \\ \frac{d^2\phi}{d\tau^2} & \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 & 0 & ... & 0 \\ \frac{d^3\phi}{d\tau^3} & 3\frac{d\phi}{d\tau}\frac{d^2\phi}{d\tau^2} & \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^3 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{d^m\phi}{d\tau^m} & ... & ... & ... & \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^3x}{dt^3} \\ . \\ . \\ \frac{d^mx}{dt^m} \end{pmatrix} \tag{B.27}$$

onde m é a derivada de ordem mais alta.

Supondo que ϕ seja monótona, pode ser mostrado que vetores contendo subseqüentes derivadas de ϕ (iniciando com a derivada de ordem zero) transformam-se linearmente sob reparametrização, segundo a matriz de transformação abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & b & a^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & c & 3ab & a^3 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & ... & ... & ... & a^m \end{pmatrix} \tag{B.28}$$

onde $a = \frac{d\phi}{d\tau}$, $b = \frac{d^2\phi}{d\tau^2}$, $c = \frac{d^3\phi}{d\tau^3}$, etc.

O grupo assim definido é um Grupo de Lie com dimensão $(m+1)$.

Voltando ao caso das AI-Snakes, teríamos dois conjuntos de transformações a considerar: o conjunto das transformações afins e o grupo de reparametrização definido pela matriz (B.28) acima. Contudo, pela linearidade das transformações afins, segue imediatamente que estes grupos comutam entre si.

Do ponto de vista da teoria de invariantes, isto implica que o conjunto de invariantes procurado é a intersecção dos conjuntos de invariantes para cada grupo separadamente.

Se considerarmos transformações afins com determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$, encontramos em (Gool *et al.* , 1995) o seguinte invariante comum:

$$\frac{12\left|x^{(1)}x^{(2)}\right|\left|x^{(2)}x^{(3)}\right| - 5\left|x^{(1)}x^{(3)}\right| + 3\left|x^{(1)}x^{(2)}\right|\left|x^{(1)}x^{(4)}\right|}{9\left|x^{(1)}x^{(2)}\right|^{8/3}} \tag{B.29}$$

o qual é denominado *curvatura afim* sendo conhecida em geometria diferencial (as barras verticais indicam determinante da matriz formada pelos vetores coluna). Invariantes deste tipo são denominados *diferenciais* uma vez que envolvem apenas derivadas das funções coordenadas em um ponto.

Voltando às snakes, o primeiro ponto a ser levantado é quanto à possibilidade de desenvolver um modelo de contorno ativo, análogo às AI-Snakes, mas agora contínuo em lugar de discreto e que leve em consideração a possibilidade de reparametrizar a snake durante sua evolução. Para tal, teremos que considerar os efeitos da mudança de parâmetros juntamente com a invariância por transformações afins, que é precisamente o ponto central do desenvolvimento acima.

Como já apontado na seção 4.4, não há referências de aplicações da Teoria de Lie em modelos de contorno ativo. Somente futuras pesquisas poderão mostrar se o desenvolvimento acima é de fato útil na prática.

Em visão computacional, contudo, os Grupos de Lie vêm ganhando atenção, particularmente com relação a métodos multi-escala e invariância.

Como já destacado acima, o Teorema dos π, juntamente com certas restrições de simetria conduz à unicidade do Kernel Gaussiano para espaços de escala lineares (Florack *et al.* , 1992).

Este fato é o ponto de partida para um modelo geométrico multi-escala em visão (Florack *et al.* , 1992; Hendee & Wells, 1997). A idéia central destes trabalhos é usar uma formulação independente de coordenadas e que permita uma interpretação geométrica do espaço de escalas correspondente ao Kernel Gaussiano. Desta forma pode-se passar naturalmente para espaços de escala não lineares via conceitos bem conhecidos em geometria Riemaniana (Florack *et al.* , 1995).

Finalizando, os trabalhos usando Grupos de Lie e seu ferramental matemático (grupos, variedades e transformações) vêm mostrando o potencial destes conceitos em visão computacional e indicando que esta é uma área que pode trazer bons

resultados tanto a nível de generalizações (Florack *et al.* , 1995), como de solução de problemas que possam ser formulados envolvendo conceitos de invariância (Gool *et al.* , 1995).