Apêndice C

Variedades Lineares por Partes e T-Superfícies

Neste capítulo fornecemos os elementos teóricos necessários para extender o método das T-Snakes da seção 5.3.2 para superfícies gerando o método das T-Superfícies (McInerney & Terzopoulos, 1997; McInerney, 1997). Com isto, ficamos em condições de propor a extensão do Dual-T-Snakes para 3D.

C.1 Definições Básicas

Seja E um espaço Euclideano de dimensão finita.

Seja $\sigma \subset E$. Então:

(1) $co(\sigma)$ denota o fecho convexo de σ;

(2) $aff(\sigma)$ denota o fecho afim σ;

(3) $tng(\sigma) = aff(\sigma) - \sigma$ denota o espaço tangente de σ o qual é o espaço linear obtido pela translação de $aff(\sigma)$ para a origem;

(4) $int(\sigma)$ denota o interior relativo de σ com respeito ao espaço $aff(\sigma)$;

(5) $\partial(\sigma)$ denota a fronteira relativa de σ com respeito ao espaço $aff(\sigma)$.

Células: Se $u \in E$, $u \neq 0$ e $\gamma \in \Re$, então o conjunto $\{x \in E \mid u^* x \geq \gamma\}$ é chamado um *semi-espaço* e sua fronteira $\{x \in E \mid u^* x = \gamma\}$ é chamado um hiperplano. Uma intersecção finita de semi-espaços é chamado um poliedro ou célula. Assim, células são conjuntos convexos fechados, podendo ser limitados ou não.

Trivialmente qualquer espaço afim de dimensão finita é uma célula.

A dimensão de uma célula é identificada com a dimensão de seu espaço tangente, isto é, $\dim(\sigma) = \dim(tng(\sigma))$, e chamaremos uma célula *m-dimensional* simplesmente por *m-célula.*

Uma *face* τ de uma célula σ é um subconjunto convexo $\tau \subset \sigma$ tal que para todo $x, y \in \sigma$ e $\lambda \in \Re$ vale a seguinte propriedade:

$$x, y \in \sigma,\ 0 < \lambda < 1,\ (1-\lambda)x + \lambda y \in \tau \Longrightarrow x, y \in \tau.$$

Uma face de dimensão k é chamada uma *k-face*. Trivialmente, uma célula σ é uma face de si própria. Todas as outras faces de σ são chamadas *faces próprias*.

Usando o teorema de separação para conjuntos convexos, pode ser mostrado que um subconjunto $\tau \subset \sigma$, $\tau \neq \sigma$ é uma face de σ se e somente se existe um semi-espaço ξ tal que $\sigma \subset \xi$ e:

$$\tau = \sigma \cap \partial\xi.$$

Na linguagem usual, $\partial\xi$ é chamado um hiperplano que suporta σ em τ.

Desta apresentação, segue imediatamente que faces são células e que qualquer célula tem um número finito de faces. Além disso, qualquer intersecção de um número finito de faces é também uma face. Uma face própria de máxima dimensão, isto é, $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1$ é chamada uma *facet* de σ. 0-faces correspondem a vértice de σ e 1-faces são também chamadas arestas de σ. Simplices são casos particulares de células simples e assim as definições dadas aqui são compatíveis com aquelas da seção 4.3.

Variedade Linear Por Partes: Seja $\widehat{M}$ uma família de $(N+1) - células$. Para $0 \leq k \leq N+1$, usaremos a seguinte notação:

$$\widehat{M}^{k} = \left\{ \tau \mid \tau \text{ é uma k-face de alguma célula } \sigma \in \widehat{M} \right\}.$$

Além disso, indicamos:

$$\left| \widehat{M} \right| = \bigcup_{\sigma \in \widehat{M}} \sigma.$$

Nós chamamos $\widehat{M}$ uma *Variedade Linear Por Partes* de dimensão $(N+1)$ se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

(1) a intersecção $\sigma_1 \cap \sigma_2$ de duas células $\sigma_1, \sigma_2 \in \widehat{M}$ é vazia ou uma face comum de ambas as células,

(2) uma facet $\tau \in \widehat{M}^{N}$ é comum a no máximo duas células de $\widehat{M}$;

(3) a família $\widehat{M}$ é localmente finita, isto é, qualquer subconjunto relativamente compacto de $\left| \widehat{M} \right|$ intercepta somente um número finito de células de $\widehat{M}$.

C.2 Aproximando Variedades Diferenciáveis Definidas Implicitamente

Seja $H : \Re^{N+K} \longrightarrow \Re^{N}$ uma aplicação suave tal que $0 \in range(H)$. Pelo Teorema da Função Implícita sabemos que o conjunto:

$$M = \left\{ x \in \Re^{N+K} \mid H(x) = 0,\ x \text{ é um ponto regular de } H \right\},$$

é uma variedade suave de dimensão K.

Nesta seção nós descrevemos um algoritmo para gerar uma variedade linear por partes de dimensão K que aproxima M.

Vamos supor uma triangulação Γ em $\Re^{N+K}$. Se usarmos uma triangulação do tipo Freudenthal temos a vantagem de que dado um simplex qualquer um de seus vizinhos pode ser obtido por regras de pivotiamento envolvendo apenas vetores de inteiros (Allgower & Georg, 1990).

Assim como na seção 4.3 nós denotamos por H_Γ a aproximação linear por partes de H com respeito a Γ. As definições para pontos regulares e valores regulares dadas em 4.3 permanecem válidas também neste contexto.

Neste caso, se zero é um valor regular de H_Γ, o conjunto $H_\Gamma^{-1}(0)$ possui a estrutura de uma variedade linear por partes. Mais precisamente:

Seja zero um valor regular de H_Γ. Se $\sigma \in \Gamma$ possui uma intersecção não nula com $H_\Gamma^{-1}(0)$, então $M_\sigma = \sigma \cap H_\Gamma^{-1}(0)$ é um politopo $K - dimensional$, e a família

$$M_\Gamma = \left\{ M_\sigma \mid \sigma \in \Gamma,\ \sigma \cap H_\Gamma^{-1}(0) \neq \emptyset \right\},$$

é uma Variedade Linear por Partes de dimensão K.

Demonstração: Ver (Allgower & Georg, 1990).

O algoritmo a seguir descreve os passos fundamentais de um algoritmo de continuação para obter a variedade M_Γ que aproxima M, embora a suposição de suavidade para H pode ser relaxada sem trazer qualquer problema para a aplicação do algoritmo.

Nós fazemos então apenas a suposição de que zero é um valor regular da aproximação linear por partes H_Γ de H . Analogamente á seção 4.3 nós dizemos que um simplex $\sigma \in \Gamma$ é um *simplex de borda* se ele contem uma $N - face$ completamente rotulada com respeito a H_Γ.

Algoritmo de Continuação Para Variedades de Dimensão K qualquer.

1. Inicialização

   Encontrar um simplex de borda $\sigma \in \Gamma$;

   Montar a lista atual de simplices de borda: $\sum = \{\sigma\}$;

   Montar $V(\sigma)$ =conjunto dos vértices de σ;

2. Repetir enquanto $V(\sigma) \neq \emptyset$ para algum $\sigma \in \sum$,

   Tomar $v \in V(\sigma)$;

   Obter por pivotiamento de v em $\widetilde{v}$ um simplex $\widetilde{\sigma}$ vizinho de σ;

   Se $\widetilde{\sigma}$ não é simplex de borda descartar $\widetilde{\sigma}$, retirar v do conjunto $V(\sigma)$. Retornar a passo (2).

Se $\widetilde{\sigma} \in \sum$ então retirar v de $V(\sigma)$ e $\widetilde{v}$ de $V(\widetilde{\sigma})$ .Retornar ao passo (2).

Atualizar $\sum$ fazendo $\sum \doteq \sum \cup \{\widetilde{\sigma}\}$;

Se tivermos $K = 2$ e uma triangulação do tipo CF (Figura C.1), então os possíveis politopos são aqueles da Figura C.2, a menos de translações e rotações:

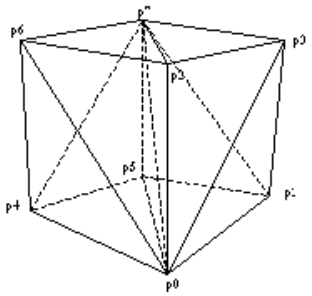

Figura C.1: Subdividindo um cubo (célula) para obter triangulação tipo CF.

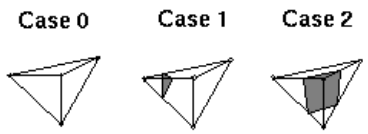

Figura C.2: Politopos para triangulação tipo CF.

Neste caso, podemos substituir o algoritmo acima pelo algoritmo dos *Tetra-Cubes* para fazer melhor uso das simplificações decorrentes do número reduzido de casos a considerar (basicamente três).

C.3 T-Superfícies

Uma das vantagens do método das T-Snakes descrito na seção 5.3.2 é a possibilidade de estendê-lo para 3D, mantendo a mesma metodologia do caso 2D. A base teórica do novo modelo - denominado T-Superfícies (McInerney & Terzopoulos, 1997; McInerney, 1997) - foi desenvolvida acima.

Como no caso 2D, os elementos básicos das T-Superfícies são: triangulação do espaço, função característica e modelo discreto para a snake.

Do ponto de vista topológico, uma T-Superfície é uma Variedade Linear por Partes de dimensão 2. Do ponto de vista dinâmico, uma T-Superfície é uma malha triangular elástica e fechada. Os pontos da malha são denominados *nós* (ou snaxels) e os triângulos denominados *elementos triangulares*.

A cada nó v_i estão associadas forças elásticas, força normal e forças de imagem, gerando uma equação de evolução idêntica àquela da seção 5.3.2.

Uma vez evoluída a superfície é preciso projetar a mesma sobre a triangulação e atualizar a função característica. O processo de reparametrização segue os mesmos passos do caso 2D, salvo as devidas modificações necessária para atualizar a função característica. Esta função tem exatamente o mesmo papel do caso 2D. Ela distingue o interior do exterior das superfícies (snakes 3D) permitindo tratar mudanças topológicas da snake 3D pela simples aplicação do algoritmo de continuação da seção anterior para determinar todas as componentes conexas em questão.

A atualização eficiente da função característica é novamente o ponto central. O algoritmo para isto é análogo àquele descrito na seção 5.3.2, observando-se agora que temos que tratar o prisma definido por cada elemento triangular $\{p_1, p_2, p_3\}$ na posição anterior e seu correspondente $\{p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}\}$ na nova posição.

Durante sua evolução, cada elemento triangular pode passar sobre zero, apenas um, ou vários nós da triangulação do espaço. O poliedro formado conectando os pontos $\{p_1, p_2, p_3\}$ com seus correspondentes $\{p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}\}$ é dividido em oito poliedros (Figura C.4). Para determinar se um nó da triangulação foi *queimado* durante a evolução da superfície, devemos determinar se este nó é interior a algum destes poliedros. O algoritmo usado é uma extensão daquele descrito na seção 5.3.2 para as T-Snakes.

Primeiramente, particionamos o domínio da imagem em oito subespaços através de três planos. Estes planos são definidos unindo-se os dois nós de cada aresta do elemento triangular na posição corrente com o nó da malha (Figura C.3).

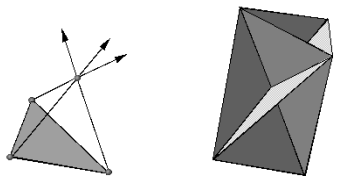

Figura C.3: Formação dos espaços usados para algoritmo de classificação em 3D.

A seguir, classificamos os três nós do elemento triangular na nova posição $\{p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}\}$ em um dos oito subespaços (Figura C.4). O resultado desta classificação é usado para determinar rapidamente se um nó da triangulação foi queimado.

O algoritmo das T-Superfícies é exatamente aquele das T-Snakes, usando-se agora o algoritmo de continuação da seção anterior para determinar as componentes conexas da superfície.

A triangulação usada em (McInerney & Terzopoulos, 1997; McInerney, 1997) é do tipo Coxeter-Freudenthal pela sua simplicidade (Figura C.1).

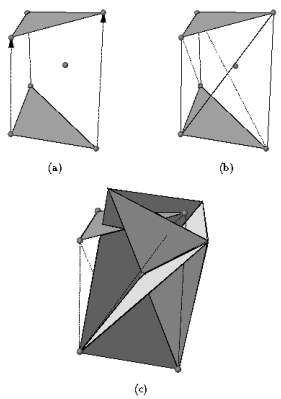

Figura C.4: (a)Elemento triangular se moveu para nova posição queimando nó da triangulação. (b)Poliedro formado pelo elemento triangular na posições nova e antiga. (c) Partição do espaço.